Magistère InforMatique **1ière & 2ième années** ***2000-01***

Réecriture et Lambda-Calcul

Philippe Audebaud (DMI — ENS Lyon)

TD — Fiche 2

I. Sur la terminaison

Ex I.1. *On considère les relation suivantes ne disposant que d'une règle :*

1. *Montrer que la relation* $--x \to x$ *termine, mais que* $-x \to ---x$ *ne termine pas.*
2. *Que savez-vous dire de la terminaison de* $-(x+y) \to (--x+y)+y$ *?*

Ex I.2. *Etudier la terminaison de la relation* $a(f(x,y)) \to f(f(a(x),y),y)$.

Ex I.3. *Dans cet exercice, on suppose que* x, y *représentent des entiers codés en notation unaire :* $s^n(0)$. *On propose le système de réécriture*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(0,0) & \longrightarrow & 0 \\ f(s(x),0) & \longrightarrow & s(f(x,x)) \\ f(x,s(y)) & \longrightarrow & s(s(f(x,y))) \end{array}\right.$$

Le constructeur f *est interprété par la fonction polynôme* $\mathbf{f}(X,Y) = 2X^2 + 3Y^2$ *et* s, 0 *respectivement par* $\mathbf{s}(X) = X + 1$ *et* $\mathbf{0} = 2$.

1. *Etudier la réduction du terme* $f(s^m(0), s^n(0))$.
2. *Puis de* $f^{k+1}(s(s(0)),0)$.

Qu'en pensez-vous ?

II. Plus sur les ordres lexicographique et multiensemble

Ex II.1. *Quelques propriétés de conservation d'invariants pour les ordres lexicographiques :*

1. *Montrer que le produit lexicographique de deux ordres stricts et un ordre strict.*
2. *Montrer que le produit lexicographique de deux relations qui terminent est une relation qui termine.*
3. *Montrer que l'extension* $>^*_{lex}$ *est un ordre strict si* $>$ *est un ordre strict.*
4. *Montrer que la relation* $>^*_{lex}$ *termine si la relation* $>$ *termine.*

Ex II.2. *Propriétés liées aux ordres multiensembles.*

1. *Montrer que si l'ordre* $>$ *est strict, alors* $>_{mul}$ *est un ordre strict.*
2. *Montrer que si l'ordre* $>$ *est strict, alors*

$$M >_{mul} N \textit{ ssi } M \neq N \textit{ et } \forall n \in N \setminus M\ \exists m \in M \setminus N\ m > n$$