Réécriture et Lambda-Calcul

Philippe Audebaud (DMI — ENS Lyon)

TD — Fiche 3

I. Ordres et Terminaison

Ex I.1. *Montrer que si $>$ est un ordre de réduction sur $\mathcal{T}(\Sigma, V)$ qui est total sur les termes sans variables, alors il satisfait la propriété du sous-terme sur les termes sans variables :*

$$\textit{pour tout } t \in \mathcal{T}(\Sigma, \emptyset), \textit{ pour tout } p \in \texttt{Pos}(t) \setminus \{\epsilon\}\ t > t|_p$$

Ex I.2. *Montrer que l'ordre strict sur $\mathcal{T}(\Sigma, V)$ défini par*

$$s > t \textit{ si } |s| > |t| \textit{ et, pour tout } x \in V,\ |s|_x \geq |t|_x$$

est un ordre de réduction.

Ex I.3. *Montrer que $<_{\texttt{lpo}}$ est un ordre.*

Ex I.4. *On définit sur $\mathcal{T}(\Sigma, V)$ la relation binaire $\preceq$ par $s \preceq t$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *$s = x = t$ pour $x \in V$*
2. *$s = f(s_1, \ldots, s_n)$, $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ pour f d'arité n, avec $s_i \preceq t_i$ pour chaque $1 \leq i \leq n$.*
3. *$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ pour f d'arité n, et $s \preceq t_i$ pour un certain indice i.*

Quelle est cette relation ?

II. Un cas particulier

Un système de réécriture de termes (TRS) R est dit *clos à droite* (right-ground) si les parties droites de toutes les règles sont des termes sans variable : $l \longrightarrow r \in R$ entraîne $\texttt{Var}(r) = \emptyset$.

Ex II.1. *Soit R est un TRS fini et clos à droite. Montrer l'équivalence :*

1. *R ne termine pas.*
2. *Il existe une règle $l \longrightarrow r \in R$ et un terme t tels que $r \longrightarrow_R^+ t$, et r sous-terme de t.*

Que peut-on en déduire quant à la terminaison des TRS finis qui sont clos à droite

Ex II.2. *Montrer que si R est clos à droite et vérifie, pour tout $l \longrightarrow r \in R$, r est R-irréductible, alors R termine.*