Réécriture et Lambda-Calcul

Philippe Audebaud (DMI — ENS Lyon)

TD — Fiche 5

I. Les beaux pré-ordres

Ex I.1. *Soit A ensemble doté d'un beau préordre $\leq$. Montrer que de toute suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite monotone (il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $i < j$ entraine $a_{\phi(i)} \leq a_{\phi(j)}$.)*

Ex I.2. *Pour n fixé, et $(A_k, \leq_k)_{1\leq k\leq n}$ ensembles munis de beaux préordres, montrer que le produit cartésien $A_1 \times \ldots \times A_n$ muni du produit des ordres composante-par-composante est encore un ensemble ayant un beau préordre.*

Ex I.3. *Montrer le théorème de Higman généralisé : Soit A un alphabet non nécessairement fini :*

Si $\leq$ est un bel ordre sur A, alors le plongement est un bel ordre sur A^*.

Se référer à `http://www.cs.chalmers.se/~coquand/` *pour une preuve constructive dans le cas fini.*

Ex I.4. *Dans le cours, on donne du théorème de Kruskal,*

Si Σ est fini, le plongement est un bel ordre sur $T(\Sigma, X)$.

le schéma de preuve suivant :

Supposons que le plongement n'est pas un bel ordre.
Considérons une mauvaise suite minimale, construite comme dans le théorème de Higman.
De cette suite on peut extraire une sous-suite de la forme $(f(s_1^i, \ldots, s_n^i))_{i\geq 0}$.
Les n suites $(s_j^i)_{i\geq 0}$ ainsi que leurs sous-suites sont bonnes.
De $(s_1^i)_{i\geq 0}$ on peut extraire une sous-suite croissante $(s_1^{\phi_1(i)})_{i\geq 0}$.
De $(s_2^{\phi_1(i)})_{i\geq 0}$ on peut extraire une sous-suite croissante $(s_2^{\phi_2\phi_1(i)})_{i\geq 0}$.

$$\vdots$$

De $(s_n^{\phi_{n-1}\ldots\phi_1(i)})_{i\geq 0}$ on peut extraire une sous-suite croissante $(s_n^{\phi_n\ldots\phi_1(i)})_{i\geq 0}$.
Clairement la suite $(f(s_1^{\phi_n\ldots\phi_1(i)}, \ldots, s_n^{\phi_n\ldots\phi_1(i)}))_{i\geq 0}$ est croissante. Contradiction !

Compléter les arguments.

Ce théorème combinatoire admet une preuve constructive. Elle a été développée notamment par Monika Seisenberger (Münich). Voir `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~seisenb/` *pour plus de détails.*

II. Complétion d'un systèeme de règles

Ex II.1. *Déterminer toutes les paires critiques de*

$$\begin{array}{rcl} (x * y) * z & \to & x * (y * z) \\ f(x) * f(y) & \to & f(x * y) \end{array}$$

Ex II.2. *Quelles sont les paires critiques du système de règles*

$$\begin{array}{rcl} f(x, x) & \to & a \\ f(x, g(x)) & \to & b \\ c & \to & g(c) \end{array}$$

Etudier sa confluence, sa terminaison.

Ex II.3. *Le système*

$$\begin{array}{rcl} f(x, x) & \to & g(x) \\ f(x, g(x)) & \to & b \\ h(c, y) & \to & f(h(y, c), h(y, y)) \end{array}$$

est-il confluent ? localement confluent ? Termine-t'il ? Quels sont les termes sans forme normale ?

Ex II.4. *Compléter le système*

$$\begin{array}{rcl} x + e & = & x \\ (x + y) + z & = & x + (y + z) \end{array}$$

Ex II.5. *Même question pour*

$$\begin{array}{rcl} x * 1 & = & x \\ 1 * x & = & x \\ i(x) * (x * y) & = & y \end{array}$$

Ex II.6. *Appliquer l'algorithme de complétion de Knuth-Bendix, aux axiomes suivants de la théorie des groupes :*

$$\begin{array}{rcl} (x * y) * z & = & x * (y * z) \\ e * x & = & x \\ i(x) * x & = & e \end{array}$$